CLASA a IX-a
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1) a) Dacă $a=0$ sau $b=0$ atunci $|a+b|=|a|+|b|$. **(1p)**

Dacă $a\neq 0$ și $b\neq 0$ avem:

i) $a>0$ și $b>0$ atunci $a+b>0$ și deci $|a+b|=|a|+|b|$; **(1p)**

ii) $a<0$ și $b<0$ atunci $a+b<0$ și $|a+b|=-(a+b)$, iar $|a|=-a$ și $|b|=-b$ și deci $|a+b|=|a|+|b|$. **(1p)**

iii) Dacă $a>0$ și $b<0$, atunci $|a|=a$ și $|b|=-b$ și sunt două situații:

$a+b\geq 0$ și se obține $|a+b|=a+b\leq a=|a|\leq|a|+|b|$;

sau

$a+b<0$ și se obține $|a+b|=-\left(a+b\right)=-a+|b|\leq|b|\leq|a|+|b|$. **(1p)**

b) Se demonstrează prin inducție.

Verificare: $|a_1+a_2|\leq|a_1|+|a_2|$ cf. a). **(1p)**

Demonstrație:

$$|a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}|\leq|a_1+a_2+...+a_n|+|a_{n+1}|\leq|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+|a_{n+1}|$$ **(2p)**

2) $a_2=1+\frac{1}{2}\sqrt{9}+\frac{1}{2}=3$, $a_3=3+\frac{1}{2}\sqrt{25}+\frac{1}{2}=6$, $a_4=6+\frac{1}{2}\sqrt{49}+\frac{1}{2}=10$ **(1,5p)**

Fie $b_n=\sqrt{8a_n+1}, n\geq 1, b_n>0\Rightarrow a_n=\frac{b_n^2-1}{8}$.**(1p)** Cum $a_{n+1}=\frac{b_{n+1}^2-1}{8}$ și $a_{n+1}=\frac{b_n^2-1}{8}+\frac{b_n}{2}+\frac{1}{2}$ se obține $b_{n+1}^2=\left(b_n+2\right)^2\Rightarrow b_{n+1}=b_n+2$, oricare ar fi $n\geq 1$. **(3p)**

Atunci $b_1=3$ și $b_n=2n+1$ **(1p)**, iar $a_n=\frac{n(n+1)}{2}\in N$, oricare ar fi $n\geq 1$.**(0,5p)**

3) Din primul și al treilea raport avem
$a^2\left(a+c\right)=c^2(a+b)\Rightarrow a\left(a^2-c^2\right)=c\left(cb-a^2\right)$ (1). **(1p)**

Din primul și al doilea raport avem
$a^2\left(b+c\right)=b^2(a+b)\Rightarrow b\left(a^2-b^2\right)=a\left(b^2-ac\right)$ (2). **(1p)**

Dacă $a>b\Rightarrow a^2>b^2$ și cf. (2) se obține $b^2>ac\Rightarrow b^2>ac>bc$, de unde $a>b>c$. **(2p)**

Atunci din $a > b > c$ obținem $a^2 - c^2 > 0$ și $a^2 > b^2 > cb \Rightarrow cb - a^2 < 0$ ceea ce contrazice relația (1). **(2p)**
Analog pentru $a < b$ avem contradicție. Deci $a = b$, și înlocuind în relația (2) rezultă $a = b = c$. **(1p)**

4) $[BI$ bisectoare în $\triangle BAA' \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{BA}{BA'}$ (cf. teoremei bisectoarei). (1) **(1p)**

$[AA'$ bisectoare în $\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{c}{b}$ (cf. teoremei bisectoarei) $\Rightarrow \Rightarrow \dfrac{BA'}{BA' + A'C} = \dfrac{c}{b+c} \Rightarrow BA' = \dfrac{ac}{b+c}$ (2) **(1p)**

Din (1) și (2) se obține $\dfrac{IA}{IA'} = c \cdot \dfrac{b+c}{ac} = \dfrac{b+c}{a}$.

Analog se demonstrează că $\dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{c+a}{b}$ și $\dfrac{IC}{IC'} = \dfrac{a+b}{c}$.**(1p)**

a) $\Rightarrow$ b),c)

$a = b = c \Rightarrow \dfrac{IA}{IA'} = \dfrac{IB}{IB'} = \dfrac{IC}{IC'} = 2$ și deci $\dfrac{IA}{IA'} + \dfrac{IB}{IB'} + \dfrac{IC}{IC'} = 6$ iar $\dfrac{IA}{IA'} \cdot \dfrac{IB}{IB'} \cdot \dfrac{IC}{IC'} = 8$. **(1p)**

b) $\Rightarrow$ a)

$\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} = 6 \Rightarrow c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 = 0$

Cum $(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2 \geq 0$, oricare ar fi a, b, c numere reale $\Rightarrow a = b = c$.**(1p)**

c) $\Rightarrow$ a)

$\dfrac{b+c}{a} \cdot \dfrac{c+a}{b} \cdot \dfrac{a+b}{c} = 8 \Rightarrow c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 = 0$ și cum $(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2 \geq 0$, oricare ar fi a, b, c numere reale $\Rightarrow a = b = c$.**(1p)**

Și în final dacă c) $\Rightarrow$ a) și a) $\Rightarrow$ b) atunci c) $\Rightarrow$ b)
b) $\Rightarrow$ a) și a) $\Rightarrow$ c) atunci b) $\Rightarrow$ c) **(1p)**